绝密★启用前

宇宙最帅联盟2023年度第二次调研考试

理数

本试卷共 4 页,23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

5. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$,若集合 $A=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$,$B=\{x\,|\,|x-2|>1\}$,则集合 $A\cap(\complement_U B)=$

A. $\{1\}$　　B. $\{-1,0,4,5\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 已知复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,若 $\frac{a}{i^{2\,022}}+2i=1+bi$,则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

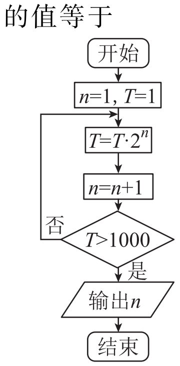
A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

4. “中国剩余定理”又称“孙子定理”,1852 年英国来华传教士伟烈亚利将《孙子算法》中“物不知数”问题的解法传至欧洲. 1874 年,英国数学家马西森指出此法符合 1801 年由高斯得出的关于同余式解法的一般性定理,因而西方称之为“中国剩余定理”,“中国剩余定理”讲的是一个关于整除的问题,现有这样一个整除问题:将 1 至 2 022 这 2 022 个数中,能被 5 除余 1 且被 7 除余 1 的数按由小到大的顺序排成一列,构成数列 $\{a_n\}$,则此数列的项数为

A. 58　　B. 57　　C. 56　　D. 55

5. 已知一个程序框图如图,则输出的 n 的值等于



A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

6. 已知抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点为 $F(1,0)$,准线与 x 轴交于点 A,点 M 在第一象限且在抛物线 C 上,则当 $\frac{|AM|}{|FM|}$ 取最大值时,直线 AM 方程为

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x-1$　　C. $y=x+1$　　D. $y=x-1$

7. 在三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA=BC=5$,$PB=CA=\sqrt{13}$,$PC=BA=2\sqrt{5}$,则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为

A. 12π　　B. 8π　　C. 24π　　D. 29π

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n\cos n\pi+3n$,则数列 $\{a_n\}$ 的前 12 项和为

A. 64　　B. 150　　C. 108　　D. 240

9. 为进一步强化学校美育育人功能,构建“五育并举”的全面培养的教育体系,某校开设了传统体育、美育、书法三门选修课程,该校某班级有 6 名同学分别选修其中的一门课程,每门课程至少有一位同学选修,则恰有 2 名同学选修传统体育的概率为

A. $\frac{5}{36}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{7}{36}$　　D. $\frac{7}{18}$

10. 已知 F_1、F_2 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点,O 为原点,双曲线上的点 P 满足 $|OP|=b$,且 $\frac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}=3$,则该双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{3}$

11. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x+1,x\leqslant 0\\|\log_2 x|,x>0\end{cases}$,函数 $g(x)=f(x)+b$ 有四个不同的零点 x_1,x_2,x_3,x_4,且满足:$x_1<x_2<x_3<x_4$. 则下列结论中不正确的是

A. $-1<b<0$　　B. $x_3x_4=1$　　C. $\frac{1}{2}\leqslant x_3<1$　　D. $x_1+x_2=-\frac{3}{2}$

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,M,N 分别是棱 BB_1,CD 的中点. 则下列结论错误的是

A. 若 F 为棱 AB 中点,则三棱锥 $M-NFB$ 的外接球的体积为 $\sqrt{6}\pi$

B. 三棱锥 A_1-MND_1 在平面 D_1DCC_1 上投影为等腰三角形

C. MN∥平面 A_1DC_1

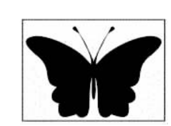
D. 在棱 BC 上存在一点 E,使得平面 $AEB_1\perp$平面 MNB

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22~23 题为选考题,考生根据要求作答。

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分。

13. 对称美是数学美的重要特征,是数学家追求的目标,也是数学发现与创造中的重要美学因素。著名德国数学家魏尔说:“美和对称紧密相连.”现用随机模拟的方法估算对称蝴蝶(如图中阴影)的面积,将此蝴蝶放在一个宽为 2 cm,长为 3 cm 的长方形内,并向该长方形内随机投掷 1 000 个点,已知恰有 360 个点落在阴影区域内,据此可推断蝴蝶的面积是________ cm^2.



14. 已知圆 $C:x^2+y^2-4x+3=0$,点 A,B 在圆 C 上,且 $|AB|=1$,O 为原点,则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$ 的最大值为________.

15. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$,当 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$ 时,$|x_1-x_2|$ 的最小值是 $\frac{\pi}{3}$,则函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递减区间为________.

16. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2ax(a>0)$ 的图象与 $g(x)=3a^2\ln x+b$ 的图象有公共点，且在公共点处的切线重合，则实数 b 的最大值为________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 12 分）

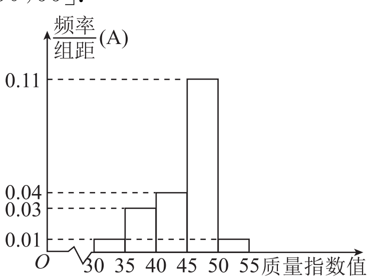
$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R 满足 $R\sin C=\cos C(a\cos B+b\cos A)$.

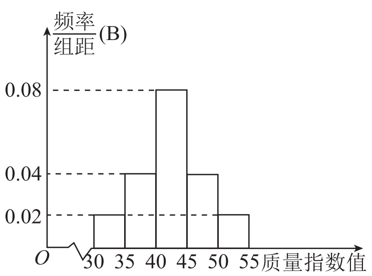
(1)求角 C；

(2)若 $c=\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

随着人们生活水平的提高，国家倡导绿色安全消费，菜篮子工程从数量保障型转向质量效益型，为了测试 A、B 两种不同有机肥料的使用效果，某科研单位用黄瓜做对比实验，分别在两片实验区各摘取 100 个，对其质量的某项指标值进行检测，质量指数达到 45 及以上的为“质量优等”，由测量结果绘成频率分布直方图，其中质量指标值分组区间是[30,35)，[35,40)，[40,45)，[45,50)，[50,55].





(1)分别求 A 实验区黄瓜质量指数的平均数和中位数；(每组数据以区间的中点值为代表，结果保留小数点后一位有效数字)

(2)请根据题中信息完成下面的 2×2 列联表，并判断是否有 99.9%的把握认为“质量优等”与使用肥料有关.

	A 有机肥料	B 有机肥料	合计
质量优等			
质量非优等			
合计			

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$，

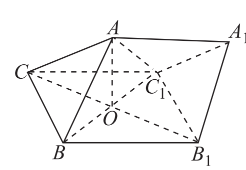
$P(x^2\geqslant x_0)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
x_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=B_1C_1$，B_1C 交 BC_1 于点 O，$AO\perp$ 平面 BB_1C_1C.

(1)求证：$AB\perp B_1C$；

(2)若 $\angle BB_1C=30^\circ$，且直线 AB 与平面 BB_1C_1C 所成角为 60°，求二面角 $A_1-B_1C_1-A$ 的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，长轴是短轴的 3 倍，点 $\left(1,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若过点 $Q(1,0)$ 且不与 y 轴垂直的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，在 x 轴的正半轴上是否存在点 $T(t,0)$，使得直线 TM，TN 斜率之积为定值？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-kx(k\in\mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$ 有一个零点，求 k 的取值范围；

(2)已知函数 $g(x)=e^x$，若 $g(x)-f(x)\geqslant1$ 恒成立，求 k 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（选修 4－4，坐标系与参数方程）（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-\sqrt{3}t\\ y=t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 极坐标方程为：$\rho\sin^2\theta=6\cos\theta$.

(1)求直线 l 普通方程与曲线 C 的直角坐标方程；

(2)过点 $M(2,0)$ 的直线 l 与 C 相交于 A，B 两点，求 $|AM|\cdot|BM|$ 的值.

23.（选修 4－5，不等式选讲）（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=|x-2|+|x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)\geqslant4$ 的解集；

(2)当 $x\in\mathbf{R}$ 时，若 $f(x)\geqslant m^2-m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.